JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 23, 191–198 (1978)

Approximation sur la demi-droite des fonctions C^∞ à décroissance rapide dans les espaces L^p avec poids

PIERRE GOETGHELUCK

Université de Paris-sud, Centre d'Orsay, Département de mathématiques, Batiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

Communicated by Oved Shisha

Received December 2, 1976

M. Guillemot-Teissier a caractérisé les fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^+$ par leur distance dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ aux fonctions de Laguerre. Un résultat analogue est établi ici, en remplaçant L^2 par des espaces L^p avec poids.

INTRODUCTION

On appelle poids sur $\mathbb{R}^+$ une function définie sur $\mathbb{R}^+$, réelle mesurable et presque partout strictement positive.

Nous considérons ici, la classe W des poids w qui satisfont les propriétés suivantes

* $w = uv$.

* u est une fonction mesurable, périodique, de période $T > 0$.

* Il existe un polynôme P non identiquement nul et une constante M tels que presque partout sur $[0, T]$ on ait

$$|P(x)| \leqslant u(x) \leqslant M. \tag{1}$$

v est une function mesurable pour laquelle il existe deux constantes positives A et B et deux entiers positifs α et β tels que, presque partout sur $\mathbb{R}^+$,

$$A(x+1)^{-\alpha} \leqslant v(x) \leqslant B(x+1)^{\beta}. \tag{2}$$

Pour $p \geqslant 1$ on pose $L_w{}^p(\mathbb{R}^+) = \{f \mid fw \in L^p(\mathbb{R}^+)\}$, muni de la structure habituelle d'espace de Banach. La norme de cet espace sera notée: $\| \ \|_{p,w}$ ou $\| \ \|_p$ quand $w \equiv 1$: $\|f\|_{p,w} = \|fw\|_p$.

Soit Π_k l'espace des polynômes d'une variable réelle, à coefficients complexes et de degré au plus k.

On pose $A_k = \{g \mid g(x) = R(x)\, e^{-x/2},\ R \in \Pi_k\}$. On a $A_k \subset L_w{}^p(\mathbb{R}^+)$. Pour $f \in L_w{}^p(\mathbb{R}^+)$ on pose $d_{p,w}(f, A_k) = \inf_{g \in A_k} \|f - g\|_{p,w}$. On note $\mathscr{S}(\mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^+$, défini de la façon

0021-9045/78/0233-0191\$02.00/0

640/23/3-2

suivante: $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^+)$ si et seulement si, pour tout couple d'entiers positifs (r, s), $x^r\varphi^{(s)}(x)$ est borné sur $\mathbb{R}^+$. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^+)$ est muni de la structure naturelle d'espace de Fréchet. Soit S l'ensemble des suites à décroissance rapide, c'est à dire l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient: Pour tout $r \in \mathbb{N}$, la suite $(n^r u_n)$ est bornée.

Nous nous proposons, dans cet article, de démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit $w \in W$. Pour tout $f \in L_w{}^p(\mathbb{R}^+)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *f est égale presque partout à une fonction de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^+)$;*

(ii) $(d_{p,w}(f, A_k))_{k\in\mathbb{N}} \in S$.

FONCTIONS DE LAGUERRE

Nous utilisons les fonctions de Laguerre $\mathscr{L}_n$ définies par:

$$\mathscr{L}_n(x) = (1/n!)\, e^{x/2}(d/dx)^n\, (x^n e^{-x}).$$

Pour les propriétés générales de ces fonctions, voir [3]. Le système $\{\mathscr{L}_n\}$ est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^+)$. Rappelons quelques résultats:

$*$ Pour tout $(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe une constante positive $C_1(r, s)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$ [2, p. 547]:

$$|\, x^r \mathscr{L}_n^{(s)}(x)| \leqslant C_1(r, s)(n + 1)^{r+s}. \tag{3}$$

$*$ Si $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^+)$ et si $\sum_0^\infty a_n\mathscr{L}_n$ est son développement en série de Laguerre, alors, $(a_n) \in S$ et, pour tout couple

$$(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \textstyle\sum_0^\infty\ a_n x^r \mathscr{L}_n^{(s)}(x)$$

converge vers $x^r g^{(s)}(x)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ [2, pp. 546, 548].

$$*\quad |\, \mathscr{L}_n(x)| \leqslant 1, \qquad [3, \text{p. } 162]. \tag{4}$$

LEMME 1. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_2(r)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|\, x^r \mathscr{L}_n(x)\|_p \leqslant C_2(r)(n + 1)^{r+(1/2p)}$$

Démonstration. Puisque [3, p. 100]

$$x\mathscr{L}_n(x) = (2n + 1)\, \mathscr{L}_n(x) - (n + 1)\, \mathscr{L}_{n+1}(x) - n\mathscr{L}_{n-1}(x)$$

il suffit de faire la démonstration pour $r = 0$.

Le lemme 1 de [1] montre que pour tout $R \in \Pi_n$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\, R(x)|\, e^{-x^2/2}\, dx \leqslant C_3 \int_{-4n^{1/2}}^{+4n^{1/2}} |\, R(x)|\, e^{-x^2/2}\, dx.$$

Prenant $R(x) = xQ(x^2)$, il vient après changement de variable: pour tout $Q \in \Pi_n$,

$$\int_0^\infty |\, Q(x)|\, e^{-x/2}\, dx \leqslant C_4 \int_0^{16(2n+1)} |\, Q(x)|\, e^{-x/2}\, dx$$

donc, d'apres l'inégalité de Schwarz,

$$\| \mathscr{L}_n \|_1 \leqslant C_5(n+1)^{1/2}$$

Il résulte de (4) que

$$\| \mathscr{L}_n \|_p^p \leqslant \| \mathscr{L}_n \|_1$$

ce qui termine la démonstration.

Quelques Inegalités Utiles

Lemme 2. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné. Pour tout $R \in \Pi_n$ et pour tout $p \geqslant 1$ on a:*

$$\| R \|_{L^\infty(I)} \leqslant [2(p+1)]^{1/p} (b-a)^{-1/p} (n+1)^{2/p} \| R \|_{L^p(I)}\,.$$

Lemme 3 (Inégalité de Markov). *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 2,*

$$\| R' \|_{L^\infty(I)} \leqslant 2(b-a)^{-1}\, n^2\, \| R \|_{L^\infty(I)}\,.$$

Pour les démonstrations de ces deux lemmes, voir [4, p. 236].

Lemme 4. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné, pour tout $d \in I$ et pour tout $R \in \Pi_n$*, on a:

$$\| R \|_{L^\infty(I)} \leqslant 2(b-a)^{-1} (n+1)^2 \|(x-d)\, R(x)\|_{L^\infty(I)}\,.$$

Démonstration. Soit $T(x) = (x-d)\, R(x)$. Pour tout $x \in I$ il existe $c \in I$ tel que $T(x) = T(d) + (x-d)\, T'(c)$; c'est à dire $R(x) = T'(c)$. L'inégalité résulte alors du lemme 3.

Lemme 5. *Il existe une constante positive C_6 telle que pour tout $h \in A_n$, $\| h \|_1 \leqslant C_6(n+1) \| h \|_\infty$.*

Ceci résulte immédiatement du lemme 1 de [1].

Théorème 2. *Soit $w \in W$, $p \geqslant 1$, $(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Il existe deux constantes positives C_7 et C_8 (qui dépendent de p, r, s, T, A, P, α) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $h \in A_n$, on ait:*

$$\| x^r h^{(s)} \|_\infty \leqslant C_7(n+1)^{C_8} \| h \|_{p,w}\,.$$

Démonstration. Si $h = \sum_0^n a_i \mathscr{L}_i$, nous avons $\sum_0^n |a_i|^2 = \|h\|_2^2$ et donc pour tout $i \leqslant n$, $|a_i| \leqslant \|h\|_2$. Par suite, d'apres (3)

$$\| x^r h^{(s)} \|_\infty \leqslant C_1(r, s)(n+1)^{r+s+1} \| h \|_2$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder et le lemme 5:

$$\| x^r h^{(s)} \|_\infty \leqslant C_1(r, s)\, C_6^{1/2}(n+1)^{r+s+(3/2)} \| h \|_\infty . \tag{5}$$

Il suffit donc de prouver le théorème 2 quant $r = s = 0$. Notons

$$h(x) = P_n(x)\, e^{-x/2} \text{ où } P_n \in \Pi_n .$$

Nous allons d'abord estimer h sur $[0, T]$. De (1) et (2) nous tirons:

$$\| h \|_{p,w} \geqslant C_9 \| P_n P \|_{L^p(0,T)} .$$

Soit r le degré de P. Appliquons le lemme 2:

$$\| P_n P \|_{L^\infty(0,T)} \leqslant C_{10}(n+r+1)^{2/p} \| P_n P \|_{L^p(0,T)} .$$

Notons $b_1, b_2, ..., b_s$, les racines de P dans $[0, T]$:

$$P(x) = (x - b_1) \cdots (x - b_s)\, Q(x)$$

où Q est un polynôme non nul sur $[0, T]$. En appliquant s fois le lemme 4, il vient alors:

$$\| P_n \|_{L^\infty(0,T)} \leqslant C_{11}(n+r+1)^{2s} \| P_n P \|_{L^\infty(0,T)}$$

et par suite puisque $s \leqslant r$ et $p \geqslant 1$,

$$\| h \|_{L^\infty(0,T)} \leqslant C_{12}(n+1)^{2r+2} \| h \|_{p,w} . \tag{6}$$

En particulier il résulte du lemme 3 que:

$$| P_n^{(k)}(0)| \leqslant C_{13}(k)(n+1)^{2k+2r+2} \| h \|_{p,w} . \tag{7}$$

On peut écrire : $P_n(x) = P_n(0) + xP_n'(0) + \cdots + x^\alpha U(x)$. D'apres (6) et (7) on a facilement:

$$\| h \|_{p,w} \cdot \| x^\alpha U(x) \|_{L^\infty(0,T)} \leqslant C_{14}(n+1)^{2\alpha+2r+2} \| h \|_{p,w}$$

et en utilisant le lemme 4:

$$\| h \|_{p,w} \cdot \| U(x) \|_{L^\infty(0,T)} \leqslant C_{15}(n+1)^{4\alpha+2r+2} \| h \|_{p,w}$$

donc:

$$\| h \|_{p,w} \cdot \| U(x)\, e^{-x/2} \|_{L^\infty(0,T)} \leqslant C_{15}(n+1)^{4\alpha+2r+2} \| h \|_{p,w} . \tag{8}$$

Nous allons maintenant estimer h sur $[NT, (NT+T)]$. Il résulte de la définition de w que pour $N \geqslant 1$:

$$\| h \|_{p,w} \geqslant \left[\int_{NT}^{NT+T} | P_n(x)\, e^{-x/2} P(x - NT)\, A(x+1)^{-\alpha} |^p \, dx \right]^{1/p}.$$

En utilisant (7) on remarque qu'il existe une constante C_{16} indépendante de N telle que pour chaque $k \leqslant \alpha$:

$$C_{16}(n+1)^{2k+2r+2} \| h \|_{p,w}$$
$$\geqslant \left[\int_{NT}^{NT+T} | P_n^{(k)}(0)(x^k/k!)\, e^{-x/2} P(x - NT)\, A(x+1)^{-\alpha} |^p \, dx \right]^{1/p}.$$

Alors de l'inégalité de Minkowski, on tire:

$$(\alpha + 1)\, C_{16}(n+1)^{2\alpha+2r+2} \| h \|_{p,w}$$
$$\geqslant \left[\int_{NT}^{NT+T} | x^\alpha (x+1)^{-\alpha}\, U(x)\, e^{-x/2} P(x - NT)\, A |^p \, dx \right]^{1/p}.$$

Mais, sur $[NT, NT+T]$, $(N \geqslant 1)$:

$$\text{A } e^{-x/2} x^\alpha (x+1)^{-\alpha} \geqslant A e^{-(NT+T)/2}\, T^\alpha (T+1)^{-\alpha}.$$

Donc,

$$C_{17}(n+1)^{2\alpha+2r+2} \| h \|_{p,w}$$
$$\geqslant \left[\int_{NT}^{NT+T} | U(x)\, P(x - NT) |^p \, dx \right]^{1/p} \cdot e^{-(NT+T)/2}.$$

Utilisons le lemme 2:

$$\left[\int_{NT}^{NT+T} | U(x)\, P(x - NT) |^p \, dx \right]^{1/p}$$
$$\times\, e^{-(NT+T)/2} [2(p+1)]^{1/p} (n - \alpha + r + 1)^{2/p}\, T^{-1/p}$$
$$\geqslant \| U(x)\, P(x - NT) \|_{L^\infty(NT, NT+T)} \cdot e^{-(NT+T)/2}.$$

Avec les notations déjà utilisées pour P:

$$P(x - NT) = (x - NT - b_1) \cdots (x - NT - b_s)\, Q(x - NT)$$

et d'après le lemme 4, appliqué s fois,

$$(2/T)^s (n - \alpha + r + 1)^{2s} \| U(x)\, P(x - NT) \|_{L^\infty(NT, NT+T)}$$
$$\geqslant \| U(x) \|_{L^\infty(NT, NT+T)} \cdot \inf_{x \in [0,T]} | Q(x) |.$$

En récapitulant les inégalités précédentes, nous obtenons:

$$\| U \|_{L^\infty(NT,NT+T)} \leqslant C_{18}(n+1)^{2\alpha+2r+2s+2+(2/p)} \| h \|_{p,w} e^{(NT+T)/2}$$

et comme $s \leqslant r$, $p \geqslant 1$,

$$\| U \|_{L^\infty(NT,NT+T)} \leqslant C_{18}(n+1)^{2\alpha+4r+4} \| h \|_{p,w} e^{(NT+T)/2}.$$

Nous avons alors pour $N \geqslant 1$:

$$\| U(x)\, e^{-x/2} \|_{L^\infty(NT,NT+T)} \leqslant C_{18}(n+1)^{2\alpha+4r+4} \| h \|_{p,w} e^{T/2}$$

et l'on remarquera que la constante C_{18} est indépendante de N. Donc en utilisant (8) il vient:

$$\| U(x)\, e^{-x/2} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leqslant \max(C_{15}, C_{18})(n+1)^{4\alpha+4r+4} \| h \|_{p,w} e^{T/2}$$

et en appliquant (5):

$$\| x^\alpha U(x)\, e^{-x/2} \|_\infty \leqslant C_{19} e^{T/2}(n+1)^{5\alpha+4r+(11/2)} \| h \|_{p,w}\,.$$

Utilisant de nouveau (7) nous obtenons pour tout $k \leqslant \alpha$

$$\| x^k P_n^{(k)}(0)\, e^{-x/2} \|_\infty \leqslant C_{20}(n+1)^{2k+2r+2} \| h \|_{p,w}$$

et par suite:

$$\| h \|_\infty \leqslant C_{21}(n+1)^{5\alpha+4r+(11/2)} \| h \|_{p,w}$$

ce qui acheve la démonstration.

Démonstration du théorème 1

Partie directe.

Soit $\sum_0^\infty a_n \mathscr{L}_n$ le développement de f en série de Laguerre. D'apres (1) et (2),

$$w(x) \leqslant C_{21}(x+1)^\beta$$

alors, d'après le lemme 1:

$$\| \mathscr{L}_j \|_{p,w} \leqslant C_{22}(j+1)^{\beta+(1/2)}.$$

Il résulte de l'inégalité de Minkowski que:

$$\left\| f - \sum_0^n a_j \mathscr{L}_j \right\|_{p,w} \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} | a_j | \, C_{22}(j+1)^{\beta+(1/2)}.$$

Puisque $(a_n) \in S$ un calcul évident montre que:

$$(d_{p,w}(f, A_n)) \in S \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Partie reciproque.

Soit $f \in L_w{}^p(\mathbb{R}^+)$ vérifiant $(d_{p,w}(f, A_k))_{k\in\mathbb{N}} \in S$. Soit Q_k un polynôme tel que $d_{p,w}(f, A_k) = \| f - Q_k e^{-x/2} \|_{p,w}$. On pose $h_0(x) = Q_0(x)\, e^{-x/2}$ et

$$h_i(x) = (Q_i(x) - Q_{i-1}(x))\, e^{-x/2}$$

pour $i \geqslant 1$. Il est clair que $\sum_0^\infty h_i$ converge dans $L_w{}^p(\mathbb{R}^+)$ vers f.

$$\| h_i \|_{p,w} \leqslant \| Q_i(x)\, e^{-x/2} - f \|_{p,w} + \| f - Q_{i-1}(x)\, e^{-x/2} \|_{p,w}$$

donc,

$$\| h_i \|_{p,w} \leqslant 2 d_{p,w}(f, A_{i-1}). \tag{9}$$

D'après le théorème 2, il en résulte que:

$$\| x^r h_i^{(s)} \|_\infty \leqslant 2C_7 (i+1)^{C_8}\, d_{p,w}(f, A_{i-1}).$$

Mais $(d_{p,w}(f, A_i))_{i\in\mathbb{N}} \in S$, donc: pour tout couple $(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(\| x^r h_i^{(s)} \|_\infty)_{i\in\mathbb{N}} \in S$. La suite $(\sum_0^n h_i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction g et pour tout couple $(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la suite $(\sum_0^n x^r h_i^{(s)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x^r g^{(s)}$. La suite $(\sum_0^n h_i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers g au sens de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^+)$ et $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^+)$ car cet espace est complet.

Montrons pour terminer que $f = g$ presque partout.

$$\| f - g \|_{p,w} \leqslant \left\| f - \sum_0^n h_i \right\|_{p,w} + \left\| \sum_0^n h_i - g \right\|_{p,w}$$

$$= d_{p,w}(f, A_n) + \left\| \sum_{n+1}^{\infty} h_i \right\|_{p,w}$$

donc, d'après (9):

$$\| f - g \|_{p,w} \leqslant d_{p,w}(f, A_n) + 2 \sum_n^\infty d_{p,w}(f, A_i)$$

et puisque $(d_{p,w}(f, A_n)) \in S$, le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $\| f - g \|_{p,w} = 0$, et $f = g$ presque partout.

References

1. G. Freud, On an inequality of Markov type, *Dokl. Acad. Nauk S.S.S.R.* **197** (1971), 4; English transl.: *Soviet Math. Dokl.* **12** (1971), 570.
2. M. Guillemot-Teissier, Développement de distributions en série de fonctions orthogonales, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **25** (1972), 519–573.
3. G. Szegö, "Orthogonal polynomials," Vol. 23, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., New York, 1959.
4. A. F. Timan, "Theory of Approximation of Functions of a Real Variable," Pergamon, New York, 1963.